Dif. Denk. II Final (Mat. Böl.) 14.05.2018

1) $y''+y=e^{x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 2) $3y''+y'-2y=x+\cos x$ 3) $y''-6y'+9y=\frac{e^{3x}}{x^2}+1$

4) $(x+1)y''+xy'-y=0$ denk. bir özel çözümü $y_1(x)=e^{-x}$ old. göre genel çözümü bulunuz.

5) $(x^2-2x)y''-2(x-1)y'+2y=(x^2-2x)^2$ denkleminin homojen kısmının genel çözümü $u(x)=c_1(x-1)+c_2x^2$ old. göre bu homojen olmayan denklemin genel çözümünü bulunuz.

6) $x^2y''+xy'=\frac{1}{2x^2}+x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

7) $y''+xy'+y=0$ denkleminin bir adi nokta komşuluğunda seri çözümünü bulunuz.

*) Matematiğin hayata bakışınızda bir katkısının olup-olmadığını açıklayınız.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar

N.A

1) $y''+y=0$ karak. denk. $\lambda^2+1=0$ $\lambda=\mp i$ genel çözüm $u(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

$y''+y=e^x$ bir özel çözümü $v(x)=Ae^x$ şek. aranır $v'=Ae^x$ + $v''=Ae^x$ olur.

$Ae^x+Ae^x=e^x \Rightarrow 2A=1$ $A=1/2$ $v(x)=\frac{1}{2}e^x$. Buna göre homojen olmayan dek. genel çözümü $y(x)=u(x)+v(x) \Rightarrow y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+1/2\,e^x$ olur

$y(0)=0$, $x=0, y=0 \Rightarrow 0=c_1+1/2 \Rightarrow c_1=-1/2$ $y'(0)=0$ old. dan

$y'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1/2\,e^x \Rightarrow x=0, y'=0 \Rightarrow 0=c_2+1/2 \Rightarrow c_2=-1/2$

$y(x)=-1/2\cos x-1/2\sin x+1/2\,e^x$ olur.

2) $3y''+y'-2y=0 \Rightarrow 3\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \cancel{\lambda_{1,2}=}\ (3\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=2/3$ $\lambda_2=-1$

$u(x)=c_1e^{2/3x}+c_2e^{-x}$, $B(x)=x+\cos x$ old. dan $B_1(x)=x$, $B_2(x)=\cos x$

$3y''+y'-2y=x$ bir özel çözümü $V_1(x)=Ax+B$ şek. aranır. $V_1'=A$ $V_1''=0$

$0+A-2Ax-2B=0 \Rightarrow -2A=1 \Rightarrow A=-1/2$ $A-2B=0$ $2B=-1/2$ $B=-1/4$

$V_1(x)=-\frac{1}{2}x-1/4$

$\boxed{y(x)=c_1e^{2/3x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{5}{26}\cos x+\frac{1}{26}\sin x}$ olur

$3y''+y'-2y=\cos x$ bir özel çözümü $V_2(x)=A\cos x+B\sin x$ şek. aranır.

$V_2'=-A\sin x+B\cos x$ $V_2''=-A\cos x-B\sin x$ olur. Denk.de yerine yazarsak

$-3A\cos x-3B\sin x-A\sin x+B\cos x-2A\cos x-2B\sin x=\cos x$

$-5B-A=0$, $-5A+B=1$ $25B+B=1 \rightarrow B=\frac{1}{26}$, $A=-5\cdot\frac{1}{26}$, $V_2(x)=\frac{-5}{26}\cos x+\frac{1}{26}\sin x$

$A=-5B$

3) $y''-6y'+9y=\frac{e^{3x}}{x^2}+1$, $y''-6y'+9y=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+9=0$

$(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=3$ 2 tane $u(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$ olur. Özel çözümü operatör yöntemi yardımıyla bulalım (sabitin değişimi yöntemiyle de bulunur)

$$V(x)=\frac{1}{D^2-6D+9}\left(\frac{e^{3x}}{x^2}+1\right)=\frac{1}{(D-3)^2}e^{3x}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(D-3)^2}1$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+3-3)^2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(D-3)^2}\cdot 1\cdot e^{0\cdot x}=e^{3x}\frac{1}{D^2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(D-3)^2}\cdot 1$$

$=e^{3x}(-\ln x)+\frac{1}{9}$ $\quad y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}-e^{3x}\ln x+\frac{1}{9}$ olur.

—o—

4) $(x+1)y''+xy'-y=0$, bir özel çözümü $y_1(x)=e^{-x}$ old. dan Liouville formülü gereği

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix}=ce^{-\int\frac{x}{x+1}dx} \Rightarrow e^{-x}y'+e^{-x}y=ce^{-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx}$$

$$\left(\cancel{e^{-x}}y'+\cancel{e^{-x}}y=c\cancel{e^{-x}}\cdot e^{\ln(x+1)}\right) \quad \frac{e^{-x}y'+e^{-x}y}{(e^{-x})^2}=c\frac{e^{-x}e^{\ln(x+1)}}{(e^{-x})^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{e^{-x}}\right)'=c\,e^{x}(x+1)$$

$y'+y=c(x+1)$

$$\frac{y}{e^{-x}}=c\int e^{x}(x+1)dx+c_1 \Rightarrow \frac{y}{e^{-x}}=c\left((x+1)e^{x}-\int e^{x}dx\right)+c_1$$

$y=c_1x+c_1e^{-x}$ olur.

—o—

5) Homojen kısmın genel çözümü $u(x)=c_1(x-1)+c_2x^2$ old. dan bu denklemin genel çözümü $y(x)=c_1(x)(x-1)+c_2(x)x^2$ şeklindedir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)(x-1)+c_2'(x)x^2&=0 \\ c_1'(x)\cdot 1+c_2'(x)\cdot 2x&=\frac{(x^2-2x)^2}{x^2-2x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c_1'(x)=x^2, \quad c_2'(x)=x-1 \\ &c_1(x)=\frac{x^3}{3}+c_1 \Rightarrow c_2(x)=\frac{x^2}{2}-x+c_2 \end{aligned}$$

$$y(x)=\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)(x-1)+\left(\frac{x^2}{2}-x+c_2\right)x^2$$

$$=c_1(x-1)+c_2x^2+\frac{x^3}{3}(x-1)+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)x^2 \text{ olur.}$$

6) $x^2y''+xy'=\frac{1}{2x^2}+x$ denk bir Cauchy Euler denk.dir

$x=e^t \to t=\ln x$ dönüşümü uyg.

Bu denklem $D=\frac{d}{dx}$ ol. üzere

$\left(x^2D^2+xD\right)y=\frac{1}{2x^2}+x$ yazılır. $x=e^t$ uyg.sa

$xDy=D_ty$, $x^2D^2=D_t(D_t-1)y$ olur. Buna göre denklem

$\left(D_t(D_t-1)+D_t\right)y=\frac{1}{2e^{2t}}+e^t$ ~~olur~~ $\Rightarrow D_t^2y=\frac{1}{2e^{2t}}+e^t$

$D_t^2y=\frac{1}{2}e^{-2t}+e^t$ (ister iki kez int. alarak $y(t)=?$ bulun)

$D_t^2y=0$ genel çözümü $u(t)=?$ $\lambda^2=0$ $\lambda_1=0$ 2. tan

$u(t)=c_1+c_2t$, $D_t^2y=\frac{1}{2}e^{-2t}+e^t$ nin bir özel

çözümü $V(t)=\frac{1}{D_t^2}\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{D_t^2}e^t=\frac{1}{2}\frac{1}{4}e^{-2t}+e^t$

$y(t)=u(t)+V(t)\Rightarrow y(t)=c_1+c_2t+\frac{1}{8}e^{-2t}+e^t$ $t=\ln x$

yazılır. $y(x)=c_1+c_2\ln x+\frac{1}{8}x^{-2}+x$ olur

7) $y''+xy'+y=0$, ~~bir a_0~~ için her nokta bir adi noktadır

$x=0$ adi nok komşuluğunda $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ şek. seri çözümü vardır

$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ denklemde yerine yazarsak

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

Birinci seri x^1 den başladığı için birinci ve üçüncü seriyi n için bir kez yazarsak

$2a_2+a_0+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$ Birinci seride $n\to n+2$ yazılırsa

$2a_2+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n\right)x^n=0\Rightarrow 2a_2+a_0=0$, $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0$ $n\geq 1$

$a_2=-\frac{1}{2}a_0$, $a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$, $n\geq 1$ Buradan $a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{3.5.\cdots(2n+1)}a_1$, $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2.4.\cdots 2n}a_0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}\Rightarrow y(x)=a_0\underbrace{\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4.\cdots 2n}x^{2n}\right)}_{y_1(x)}+a_1\underbrace{\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3.5.\cdots(2n+1)}x^{2n+1}\right)}_{y_2(x)}$

$y(x)=a_0\,y_1(x)+a_1\,y_2(x)$ şekli seri çözümü bulunur.